Integrais Múltiplas

Prof. Dr. Vinícius Wasques

Universidade Paulista - Unip, Campus Swift Campinas

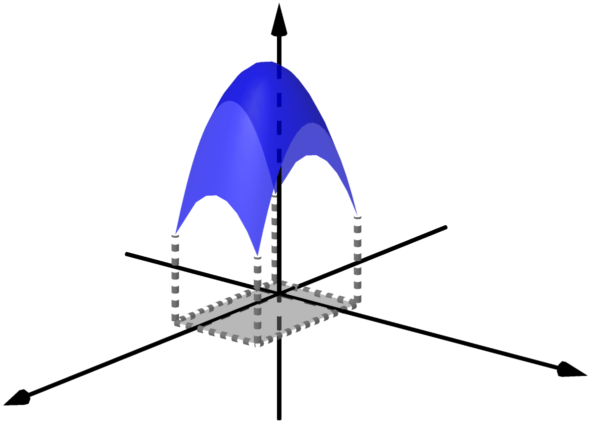
23 de abril de 2020

Integrais

- As integrais podem ser utilizadas para calcular área de regiões bidimensionais, isto é, área de triângulos, quadrados, e entre outros polígonos.

- Podemos utilizar integrais múltiplas também para esse fim. Mais que isso, serão usadas para calcular volume de sólidos!

Integrais múltiplas



Como calcular?

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx$$

ou

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

Propriedades

1)

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy$$

2)

$$\int \int_A (f(x,y) + g(x,y))dA = \int \int_A f(x,y)dydx + \int \int_A g(x,y)dA$$

3)

$$\int \int_A cf(x,y)dA = c\int \int_A f(x,y)dA$$

Exemplo:

Calcule a integral

$$\int_0^2 \int_1^2 (2xy)dydx$$

.

Exemplo:

Calcule a integral

$$\int_0^2 \int_1^2 (2xy)dydx$$

.

1º:

$$\int_1^2 (2xy)dy = 2x\left(\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=1}^{2}$$

Exemplo:

Calcule a integral

$$\int_0^2 \int_1^2 (2xy)dydx$$

.

1º:

$$\int_1^2 (2xy)dy = 2x\left(\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=1}^{2} = 2x\left(\frac{(2)^2}{2} - \frac{(1)^2}{2}\right)$$

Exemplo:

Calcule a integral

$$\int_0^2 \int_1^2 (2xy)dydx$$

.

1^o:

$$\int_1^2 (2xy)dy = 2x\left(\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=1}^{2} = 2x\left(\frac{(2)^2}{2} - \frac{(1)^2}{2}\right) = 2\frac{3}{2}x$$

Exemplo:

Calcule a integral

$$\int_0^2 \int_1^2 (2xy)dydx$$

.

1^o:

$$\int_1^2 (2xy)dy = 2x\left(\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=1}^{2} = 2x\left(\frac{(2)^2}{2} - \frac{(1)^2}{2}\right) = 2\frac{3}{2}x = 3x$$

Exemplo:

Calcule a integral

$$\int_0^2 \int_1^2 (2xy)dydx$$

.

1^o:

$$\int_1^2 (2xy)dy = 2x\left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=1}^{2} = 2x\left(\frac{(2)^2}{2} - \frac{(1)^2}{2}\right) = 2\frac{3}{2}x = 3x$$

2^o: $\int_0^2 3xdx = 3\frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{2}$

Exemplo:

Calcule a integral

$$\int_0^2 \int_1^2 (2xy)dydx$$

.

1°:

$$\int_1^2 (2xy)dy = 2x\left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=1}^2 = 2x\left(\frac{(2)^2}{2} - \frac{(1)^2}{2}\right) = 2\frac{3}{2}x = 3x$$

2°: $\int_0^2 3xdx = 3\frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^2 = 3\left(\frac{(2)^2}{2} - \frac{(0)^2}{2}\right)$

Exemplo:

Calcule a integral

$$\int_0^2 \int_1^2 (2xy)dydx$$

.

1^o:

$$\int_1^2 (2xy)dy = 2x\left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=1}^{2} = 2x\left(\frac{(2)^2}{2} - \frac{(1)^2}{2}\right) = 2\frac{3}{2}x = 3x$$

2^o: $\int_0^2 3xdx = 3\frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{2} = 3\left(\frac{(2)^2}{2} - \frac{(0)^2}{2}\right) = 3\frac{4}{2}$

Exemplo:

Calcule a integral

$$\int_0^2 \int_1^2 (2xy)dydx$$

.

1º:

$$\int_1^2 (2xy)dy = 2x\left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=1}^{2} = 2x\left(\frac{(2)^2}{2} - \frac{(1)^2}{2}\right) = 2\frac{3}{2}x = 3x$$

2º: $\displaystyle\int_0^2 3xdx = 3\frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{2} = 3\left(\frac{(2)^2}{2} - \frac{(0)^2}{2}\right) = 3\frac{4}{2} = 6$

Exemplo:

Calcule a integral

$$\int_1^2 \int_0^2 (x^2 sen(y))dxdy$$

.

Exemplo:

Calcule a integral

$$\int_1^2 \int_0^2 (x^2 sen(y))dxdy$$

.

1°:

$$\int_0^2 (x^2 sen(y))dx = sen(y) \left(\frac{x^3}{3} \right) \Big|_{x=0}^{2}$$

Exemplo:

Calcule a integral

$$\int_1^2 \int_0^2 (x^2 sen(y))dxdy$$

.

1^o:

$$\int_0^2 (x^2 sen(y))dx = sen(y)\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{x=0}^{2} = sen(y)\left(\frac{(2)^3}{3} - \frac{(0)^3}{3}\right)$$

Exemplo:

Calcule a integral

$$\int_1^2 \int_0^2 (x^2 sen(y))dxdy$$

.

1^o:

$$\int_0^2 (x^2 sen(y))dx = sen(y)\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{x=0}^{2} = sen(y)\left(\frac{(2)^3}{3} - \frac{(0)^3}{3}\right)$$

$$= \frac{8}{3} sen(y)$$

Exemplo:

Calcule a integral

$$\int_1^2 \int_0^2 (x^2 sen(y))dxdy$$

.

1ª: $\int_0^2 (x^2 sen(y))dx = sen(y)\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{x=0}^{2} = sen(y)\left(\frac{(2)^3}{3} - \frac{(0)^3}{3}\right)$
$= \frac{8}{3} sen(y)$

2ª: $\int_1^2 \frac{8}{3} sen(y)dy = -\frac{8}{3}(cos(y))\Big|_{y=1}^{2}$

Exemplo:

Calcule a integral

$$\int_1^2 \int_0^2 (x^2 sen(y))dxdy$$

.

1º:

$$\int_0^2 (x^2 sen(y))dx = sen(y)\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{x=0}^{2} = sen(y)\left(\frac{(2)^3}{3} - \frac{(0)^3}{3}\right)$$

$$= \frac{8}{3} sen(y)$$

2º: $$\int_1^2 \frac{8}{3} sen(y)dy = -\frac{8}{3}(cos(y))\Big|_{y=1}^{2} = -\frac{8}{3}(cos(2) - cos(1))$$

Exemplo:

Calcule a integral

$$\int\int_A (4xy + 6x)dA$$

, sendo A a região dada por

$$A = \{(x, y) : 2 \leq x \leq 4 \text{ e } 0 \leq y \leq 1\}.$$

Exemplo:

Calcule a integral

$$\int\int_A (4xy + 6x)dA$$

, sendo A a região dada por

$$A = \{(x, y) : 2 \leq x \leq 4 \ \text{ e } \ 0 \leq y \leq 1\}.$$

$$\int_2^4 \int_0^1 (4xy + 6x)dydx$$

Exemplo:

$$\int_2^4 \int_0^1 (4xy + 6x)dydx \quad =$$

Exemplo:

$$\int_2^4 \int_0^1 (4xy + 6x)dydx = \int_2^4 \left(4x\frac{y^2}{2} + 6xy \Big|_{y=0}^{1} \right) dx$$

$$=$$

Exemplo:

$$\int_2^4 \int_0^1 (4xy + 6x)dydx = \int_2^4 \left(4x\frac{y^2}{2} + 6xy\Big|_{y=0}^{1} \right) dx$$

$$= \int_2^4 (2x + 6x)\, dx$$

$$=$$

Exemplo:

$$\begin{aligned}
\int_2^4 \int_0^1 (4xy + 6x)dydx &= \int_2^4 \left(4x\frac{y^2}{2} + 6xy\Big|_{y=0}^{1} \right) dx \\
&= \int_2^4 (2x + 6x)\, dx \\
&= 2\frac{x^2}{2} + 6\frac{x^2}{2}\Big|_{x=2}^{4} dx \\
&=
\end{aligned}$$

Exemplo:

$$\begin{aligned}
\int_2^4 \int_0^1 (4xy + 6x) dydx &= \int_2^4 \left(4x\frac{y^2}{2} + 6xy \Big|_{y=0}^{1} \right) dx \\
&= \int_2^4 (2x + 6x)\, dx \\
&= 2\frac{x^2}{2} + 6\frac{x^2}{2} \Big|_{x=2}^{4} dx \\
&= (4)^2 + 3(4)^2 - ((2)^2 + 3(2)^2) \\
&=
\end{aligned}$$

Exemplo:

$$
\begin{aligned}
\int_2^4 \int_0^1 (4xy + 6x) dydx &= \int_2^4 \left(4x\frac{y^2}{2} + 6xy \Big|_{y=0}^{1} \right) dx \\
&= \int_2^4 (2x + 6x)\, dx \\
&= 2\frac{x^2}{2} + 6\frac{x^2}{2} \Big|_{x=2}^{4} dx \\
&= (4)^2 + 3(4)^2 - ((2)^2 + 3(2)^2) \\
&= 16 + 3.16 - (4 + 3.4) \\
&=
\end{aligned}
$$

Exemplo:

$$
\begin{aligned}
\int_2^4 \int_0^1 (4xy + 6x)dydx &= \int_2^4 \left(4x\frac{y^2}{2} + 6xy \Big|_{y=0}^{1} \right) dx \\
&= \int_2^4 (2x + 6x)\, dx \\
&= 2\frac{x^2}{2} + 6\frac{x^2}{2} \Big|_{x=2}^{4} dx \\
&= (4)^2 + 3(4)^2 - ((2)^2 + 3(2)^2) \\
&= 16 + 3.16 - (4 + 3.4) \\
&= 16 + 48 - 16 \\
&= 48
\end{aligned}
$$

Exercícios propostos

Exercício 1, página 83 da apostila Unip

Exercícios 1a), 1c) e 1d) página 87 da apostila Unip

Exercício 1b), página 87 da apostila Unip

Exercícios 2, página 88 da apostila Unip

- Os exercícios em preto são para praticar.
- Os exercícios em vermelho são para entregar.

Obrigado pela atenção!

Prof. Dr. Vinícius Wasques

email: vinicius.wasques@docente.unip.br

Departamento de Engenharia, Ciência da Computação e Sistemas de Informação

site: https://viniciuswasques.github.io/home/